GARA DI MATEMATICA ON-LINE (20/11/2023)
BIENNIO

1. LA CASA DI CARTA [2028]

Stiamo cercando il valore più piccolo $k \in \mathbb{N}$ per cui $n = 5 + 7k \geq 2023$, cioè $k \geq \frac{2023-5}{7} \cong 288,2$. Per $k = 289$ si ha $n = 5 + 289 \cdot 7 = 2028$.

2. STRANGER THINGS [12]

La misura degli angoli interni di un poligono di n lati è $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$, mentre il suo angolo esterno misura $180 - \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = \frac{360°}{n}$.

Risolviamo $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 5 \cdot \frac{360°}{n}$ cioè $n = 12$.

3. INTERSTELLAR [11]

$2304 = 3^2 \cdot 2^8$, quindi $2304 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3^{2-n} \cdot 2^{n+8}$. Dovendo avere $\begin{cases} 2-n \geq 0 \\ n+8 \geq 0 \end{cases}$ si ha $-8 \leq n \leq 2$. Siccome $n \in \mathbb{Z}$, abbiamo 11 soluzioni possibili.

4. FORREST GUMP [10]

Se $x = 10a + b$, allora $S(x) = a + b$ con $1 \leq a + b \leq 18$. Siccome il problema chiede $S(a+b) = 3$ si deduce che o $a + b = 3$, $a + b = 12$.
Nel primo caso abbiamo 3 possibilità (12, 21 e 30), mentre nel secondo caso abbiamo 7 possibilità (39, 48, 57, 66, 75, 84 e 93).
In totale abbiamo 10 soluzioni.

5. ADVENTURE TIME [178]

$24! + 20! = 20!(24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 + 1) = 20! \cdot 505^2$.

Ricordiamo che il prodotto $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n+1)^2$ come è possibile verificare semplicemente svolgendo i calcoli. I fattori primi sono tutti i numeri primi minori di 20 e il numero 101 la cui somma vale: $2+3+5+7+11+13+17+19+101 = 178$.

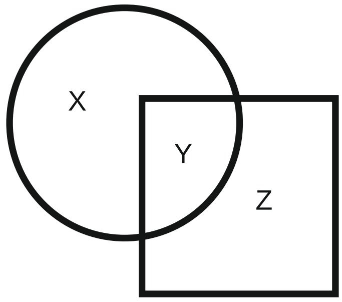
6. LE FOLLIE DELL'IMPERATORE [1011]

Svolgendo i calcoli nelle parentesi otteniamo:
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{5}} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{\cancel{n}} = \frac{n+1}{2}.$$
Tutti i numeri n dispari verificano l'equazione.
Tra 2 e 2023 abbiamo 1011 numeri dispari.

7. FAMILY GUY [81]

Risolviamo l'equazione.
$$(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+20) = 174+176+178+\cdots+192$$
$$20x + \frac{20 \cdot 21}{2} = 174 \cdot 10 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 18$$
$$20x = 174 \cdot 10 + 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} - \frac{20 \cdot 21}{2}$$
$$x = 87 + \frac{9}{2} - \frac{21}{2} = 87 - 6 = 81.$$

8. BREAKING BAD [56]

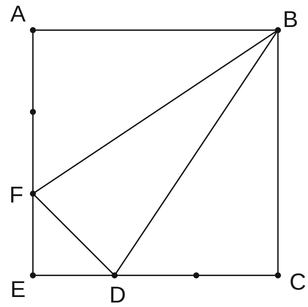


Riferendoci alla figura a lato, abbiamo che $x+y+z=329$, $x+y=234$ e $y=101$. A noi interessa calcolare $y+z$ e quindi, siccome $x=234-101=133$, $y+x=329-x=329-133=196=14^2$.
Il perimetro cercato è $4\cdot 14=56$ unità.

9. BLACK MIRROR [300]

Se V sono i votanti, deve accade re che $\frac{70}{100}V-\frac{30}{100}V=120$ cioè $\frac{2}{5}V=120$ e quindi $V=300$.

10. NEON GENESIS EVANGELION [23]



Sia x il lato del quadrato, allora x^2 è il valore della sua area.
$A_{FBD}=A_{ABCE}-2\cdot A_{ABF}-A_{FDE}=x^2-2\cdot\frac{2}{3}x\cdot x\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x\cdot\frac{1}{3}x=\frac{5}{18}x^2$.
Il rapporto richiesto vale: $\frac{A_{ABCE}}{A_{FBD}}=\frac{x^2}{\frac{5}{18}x^2}=\frac{18}{5}$
La soluzione richiesta è $18+5=23$.

11. FULL METAL ALCHEMIST [31]

Determiniamo passo dopo passo la capacità in ordine crescente dei vari bicchieri. Innanzitutto notiamo che, per avere la somma 1, ci deve essere il bicchiere con 1cl. Rimangono da determinare le capacità degli altri 5 bicchieri. Notiamo che, per avere la somma due, non potendo avere un altro bicchiere con 1cl, dobbiamo avere il bicchiere da 2cl. Rimangono 4 bicchieri. La capacità di 3 è ora garantita. Il 4 invece no, tuttavia non avrebbe senso aggiungere un bicchiere la cui capacità è già raggiunta, pertanto non aggiungiamo un bicchiere con capacità da 3cl. Quindi per avere la somma da 4, dobbiamo aggiungere il bicchiere con 4cl. Rimangono 3 bicchieri da determinare. Notiamo che, avendo ora i numeri 1; 2; 4, possiamo ottenere come somma tutti i numeri fino a 7 cl. Dobbiamo aggiungere l'8, il primo valore non raggiungibile. In questo modo si vede rapidamente che gli altri due dovranno avere capacità di 16cl e 32cl.
La risposta richiesta è $32-1=31$.

12. RICK & MORTY [101]

La somma dei coefficienti di un polinomio si ottiene semplicemente calcolando $p(1)$.
Nel nostro caso $p(1)=2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 100=100!$ Il primo valore che non divide $100!$ è 101.

13. ALPHAGO [13]

Sul primo dado, quello con 4 facce esca il numero che vuole (1), su quello da 6 facce non deve uscire lo stesso numero de primo dado ($\frac{5}{6}$), e su quello con 8 facce non devono uscire nessuno dei due numero già visti sugli altri due dadi ($\frac{6}{8}$). La probabilità richiesta è $P=1\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{8}=\frac{5}{8}$.
La risposta richiesta è $5+8=13$.

14. DISINCANTO [1300]

Dovendo essere $p(x)=r(x)g(x)+r(x)=r(x)\left(g(x)+1\right)$ ed essendo
$p(x)=x^3+x^2+x+6=(x+2)(x^2-x+3)$ avremo che $r(x)=x+2$ e $g(x)=x^2-x+2$.
$g(36)+r(36)=1300$.

15. SHERLOCK [9960]

Ci sono in totale $5!=120$ numeri e ogni cifra compare $4!=24$ volte in ciascuna delle posizioni del numero.

La somma cercata è $(1+2+3+4+5)\cdot 24\cdot 11111=3.999.960$.

16. GUIDA GALATTICA PER AUTOSTOPPISTI [322]

Basta usare l'identità di Sophie-Germain, per cui $a^4+4b^4=\left(a^2-2ab+2b^2\right)\left(a^2+2ab+2b^2\right)$, osservando che $324=4\cdot 3^4$ e quindi:

$$\frac{\left(10^4+324\right)\left(22^4+324\right)}{\left(4^4+324\right)\left(16^4+324\right)}=\frac{\left(10^2-2\cdot 10\cdot 3+2\cdot 3^2\right)\left(10^2+2\cdot 10\cdot 3+2\cdot 3^2\right)\left(22^2-2\cdot 22\cdot 3+2\cdot 3^2\right)\left(22^2+2\cdot 22\cdot 3+2\cdot 3^2\right)}{\left(4^2-2\cdot 4\cdot 3+2\cdot 3^2\right)\left(4^2+2\cdot 4\cdot 3+2\cdot 3^2\right)\left(16^2-2\cdot 16\cdot 3+2\cdot 3^2\right)\left(16^2+2\cdot 16\cdot 3+2\cdot 3^2\right)}=$$

$$\frac{\cancel{58}\cdot\cancel{178}\cdot\cancel{370}\cdot 634}{10\cdot\cancel{58}\cdot\cancel{178}\cdot\cancel{370}}=\frac{634}{10}=\frac{317}{5}.$$

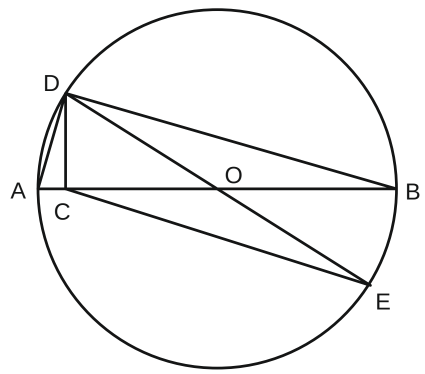
La risposta richiesta è $317+5=322$.

17. IL SIGNORE DEGLI ANELLI [17]

La strategia ottimale è, visto che sarà necessario effettuare più viaggi avanti e indietro lungo il ponte per spostare la torcia, mandare avanti inizialmente le persone più veloci, così da usarle successivamente per portare indietro la torcia. Più precisamente la strategia ottimale è questa:

- gli esploratori 1 e 2 attraversano il ponte (+2 minuti, tempo passato 2 minuti);
- l'esploratore 1 torna indietro (+1 minuto, tempo passato 3 minuti);
- gli esploratori 3 e 4 attraversano il ponte (+10 minuti, tempo passato 13 minuti);
- l'esploratore 2 torna indietro (+2 minuti, tempo passato 15 minuti);
- gli esploratori 1 e 2 attraversano il ponte; (+2 minuti, tempo passato 17 minuti);

18. RITORNO AL FUTURO [24]



Osserviamo che i triangoli DCO e COE sono equivalenti, in quanto Stessa base ($DO=OE$) e stessa altezza.

Se $AC=x$, allora $r=\frac{13}{2}x$ e

$$\frac{A_{DCE}}{A_{ABD}}=\frac{2\cdot A_{DCO}}{A_{ABD}}=\frac{\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{DC}\cdot(r-x)}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{2}r\cdot\cancel{DC}}{\cancel{2}}}=\frac{r-x}{r}=\frac{\frac{13}{2}x-x}{\frac{13}{2}x}=\frac{11}{13}$$

La risposta richiesta è $11+13=24$.